EL PRINCIPIO FREGEANO DEL CONTEXTO EN *DIE GRUNDLAGEN DER ARITHMETIK*. UNA REVISIÓN A LA INTERPRETACIÓN DE DUMMETT*

María Gabriela Fulugonio
Universidad de Buenos Aires
gfulug@filo.uba.ar

Resumen

En su obra de 1884, *Die Grundlagen der Arithmetik* [*Gl.*], Frege establece el principio del contexto como uno de sus principios fundamentales y propone valerse de él para dar con el concepto adecuado de número. Así, ofrece una definición de tipo contextual de número cardinal, pero ante una objeción que le resulta insalvable se decide por una definición explicita. La cuestión acerca de cuál ha sido entonces el sentido de establecer con tanto énfasis el principio del contexto admite más de una respuesta. Mi texto polemiza con la interpretación canónica que se ha dado al papel de este principio en *Gl.* (Dummett 1991), acusándola de permanecer encandilada por lo que se lee de manera inmediata en desmedro de una evaluación más integral y crítica. En particular, defenderé que: i) a diferencia de lo afirmado en Dummett 1991, la definición contextual de número cardinal (que en virtud del principio del contexto se propone como una primera aproximación de la definición de número buscada) no es abandonada por Frege al dar su definición explícita de número, ii) el principio del contexto tiene en *Gl.* un papel erístico fundamental de eliminar posiciones rivales acerca de la naturaleza de los números, iii) dicha definición contextual de número tiene un papel heurístico en el contexto de descubrimiento, en el sentido de que ofrece una intuición clave que permite llegar a la formulación final (definición explícita), iv) a su vez, la definición contextual es una condición necesaria de la definición explícita en el contexto de justificación, siendo que esta última se ha construido a partir de la primera.

* Este trabajo tiene como antecedente el que fuera expuesto en el Coloquio SADAF '04 en ocasión de haber sido acreedor del premio "Estímulo a la investigación" otorgado por SADAF en 2004. A su vez, podrá reconocerse en él una profundización del planteo sugerido en Fulugonio 2007. Versiones anteriores fueron presentadas en el *Magistranden- und Doktoranden-Kolloquium* a cargo del Prof. Ulises Moulines (Ludwig-Maximilians Universität), en el *Colloquium logico-philosophicum* de la Universidad de Erlangen-Nürnberg y en el *Kolloquium der Philosophie* de la Universidad de Paderborn.

Agradezco al público de tales eventos y, en particular, las observaciones de Volker Peckhaus, Javier Legris, Ulises Moulines, Christian Thiel, Michael Beaney, Alberto Moretti e Ignacio Angelelli. Asimismo, agradezco al evaluador anónimo asignado por SADAF, cuyas indicaciones me ayudaron a mejorar el texto de manera sustantiva. Finalmente, agradezco el apoyo financiero de la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad de Buenos Aires (UBACyT) durante el periodo 2003/07 y el del Servicio de Intercambio Académico Alemán (DAAD), que posibilitó mi estadía en Alemania durante el Semestre de Invierno 2005/06.

Por todo ello, sostengo que la función del principio del contexto no es la que prioriza Dummett, *i. e.*, la fallida función de resolver el problema ontológico de la naturaleza de los números, sino que es fundamentalmente metodológica. En efecto, es en su función erística y heurística en donde debe ubicarse su relevancia para la investigación llevada a cabo en *Gl.*

PALABRAS CLAVE: Principio del contexto; Definición contextual de número; Definición explícita de número; Objetos abstractos; Representaciones.

Abstract

In his masterpiece of 1884, *Die Grundlagen der Arithmetik* [*Gl.*] Frege presents the context principle as a fundamental one in his investigation *à propos* an accurate concept of number. Thus, resting on it he offers a contextual definition of cardinal number; but after analyzing some objections he realizes that this definition does not work and decides himself for an explicit one. The question about what is the purport of the context principle when something that appeared to be the consequence (and the intended consequence) is put aside admits more than a single answer. In this paper I argue against the canonic interpretation (Dummett 1991) for, even while keeping next to the Fregean text, it fails to offer an integral explanation of how the context principle works all along *Gl.* In particular, I will defend that: i) contrary with Dummett 1991, the contextual definition of cardinal number (which on regards of the context principle is proposed as a first approximation of the desired definition) is not abandoned by Frege when giving his explicit definition of number, ii) the context principle has in *Gl.* a fundamental eristic role of crossing out rival positions about the nature of numbers, iii) such contextual definition of number has an heuristic role in the discovery context, in the sense it offers a key intuition towards the final formulation (the explicit definition), iv) furthermore, the contextual definition is a necessary condition in the justification context for the latest has been built up through the first one.
For all this, I maintain that the function of the context principle is not the one Dummett prioritizes, *i. e.*, the failed function of solving the ontological problem of the nature of numbers; the function of the context principle is rather and fundamentally methodological. It is on its eristic and heuristic function that its relevance to the *Gl.* investigation must be looked for.

KEY WORDS: Context principle; Contextual definition of number; Explicit definition of number; Abstract objects; Representations.

Con el objetivo de obtener un concepto adecuado de número, y luego de transitar distintas estrategias, Frege inaugura en el §62 de *Die Grundlagen der Arithmetik* [*Gl.*] una propuesta que le permitirá de manera casi inmediata dar con una definición contextual o implícita de número cardinal. Parágrafos más adelante Frege propone una definición explícita. La presencia de estas dos definiciones de tipo tan diferente ha recibido distintos diagnósticos. La versión dominante a partir de Dummett

1991 indica que Frege "abandona" o descarta la definición contextual a favor de una definición explícita.

El propósito del presente trabajo es criticar esta interpretación canónica, mostrando que la definición explícita se construye a partir de la definición contextual. Si esto es así (si la definición explícita se construye a partir de la definición contextual), entonces este hecho da lugar a una reevaluación, por lo pronto, de uno de los tres principios anunciados en la "Introducción" de *Gl.* en tanto rectores de toda la investigación, a saber, el principio del contexto. A propósito de ello, en mi trabajo defenderé que: i) a diferencia de lo que afirma Dummett (1991), la definición contextual de número cardinal (que en virtud del principio del contexto es propuesta como una primera aproximación a la definición de número buscada) no es abandonada por Frege al dar su definición explícita de número, ii) el principio del contexto tiene en *Gl.* un papel erístico fundamental de eliminar posiciones rivales acerca de la naturaleza de los números, iii) dicha definición contextual de número tiene un papel heurístico en el contexto de descubrimiento, en el sentido de que ofrece una intuición clave que permite llegar a la formulación final (definición explícita), iv) a su vez, la definición contextual es una condición necesaria de la definición explícita en el contexto de justificación, siendo que esta última se ha construido a partir de la primera. Por todo ello, sostendré como conclusión que la función del principio del contexto no es la que prioriza Dummett, *i. e.*, la fallida función de resolver el problema ontológico de la naturaleza de los números, sino que la función del principio del contexto es fundamentalmente metodológica. En efecto, es en su función erística y heurística en donde debe ubicarse su relevancia para la investigación llevada a cabo en *Gl.*

Comienzo en la sección I con una breve exposición del problema. Dedico I.1 a un análisis del rol del principio del contexto respecto de las principales tesis sobre la naturaleza de los números y I.2 a las distintas versiones de dicho principio que Frege ofrece en *Gl*. II está dedicada a la definición contextual de número. En II.1 muestro cómo de la consideración de un criterio de identidad entre objetos Frege llega a un criterio general para la igualdad numérica: la definición contextual de número. En II.2 se analizan las tres objeciones fregeanas a dicha definición, la tercera de las cuales da lugar al momento crítico de mi trabajo. Una vez sentados estos elementos, concentro en III mi discusión a la interpretación dummettiana. Así, esta sección está dedicada a los avatares en torno a la definición comúnmente llamada nominal o explícita. En III.1 presento la postura de Dummett acerca del cambio fregeano de estrategia (a propósito de dar con una definición de número cardinal) y sitúo mis coincidencias y desacuerdos con su interpretación, profundizando lo ya sugerido en II. En III.2 argumento a favor de una interpretación alternativa. Ello requiere de un análisis crítico de acerca de la naturaleza del principio del contexto para el cual nos apoyaremos en los distintos modos de presentación del mismo a lo largo del texto. Finalmente, en IV concluyo afirmando una interpretación del principio deflacionaria respecto de su pretendida función ontológica. La nueva conjetura acerca de cómo verdaderamente se ha usado en *Grundlagen* el principio del contexto arroja una significación del mismo marcadamente diferente a la que resulta de una lectura literal y canónica.

I. Presentación del problema

En *Gl.* Frege formula un principio sobre el que, en tanto tal, no volverá a expedirse en obras posteriores: el problemático principio del contexto. Ya en la "Introducción" Frege se refiere a él como uno de sus tres principios fundamentales. Junto con la necesidad de "separar tajantemente lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de lo objetivo" (primer principio, *Gl.*, p. 113) y con el principio de la diferencia entre concepto y objeto (tercer principio), Frege enuncia el principio faltante de la siguiente manera:

> no se debe preguntar por el significado de una palabra aislada, sino en el contexto de una proposición (*Gl.*, p. 113).

Y advierte que si uno no lo observa "pronto se verá forzado a tomar, como significado de las palabras, las imágenes mentales o actos de la mente individual" (*Gl.*, p. 113), lo que conduce a una confusión entre lo subjetivo y lo objetivo, es decir, a una violación del primer principio. Con esta advertencia Frege resume buena parte de lo que será su discusión con las escuelas matemáticas de la época y el rol que en esta discusión atribuye al principio del contexto.

Tal como veremos, Frege navega entre la siguiente ambigüedad: rechaza las concepciones imperantes en su época acerca de la naturaleza de los números básicamente por subjetivistas, pero no logra una definición realista convincente. En contraposición a las escuelas matemáticas de la época, el número ha de ser algo objetivo y abstracto.[1] Así, frente a la imposibilidad de dar con este concepto de manera inmediata, el mate-

[1] Acerca de la noción fregeana temprana de objeto abstracto cf. Angelelli (1967), especialmente pp. 65-70, 115-116 y 233-241.

mático de Jena apela –giro lingüístico mediante– a esclarecer el significado de una proposición en la que aparezca un término numérico, con la secreta esperanza, conjeturo, de que ello arroje alguna intuición sobre la noción misma de número. Pero, el concepto de número no estará dado por el significado de una palabra aislada (en este caso, el término numérico en cuestión) ya que ello nos arrojaría a una noción de número subjetiva: el número sería la representación asociada a la palabra, y esto es lo que por el principio del contexto se descarta, de modo tal que el principio del contexto funciona como salvaguarda del subjetivismo. Para Frege la imagen mental asociada a una palabra no equivale a su significado. El concepto apropiado de número habrá de surgir, entonces, de un análisis más complejo.

I. 1. El argumento silogístico-disyuntivo de Gl. y la apelación al principio del contexto

Tras haber anunciado su proyecto logicista en *Begriffsschrift* [*Bs.*] y posiblemente en virtud de la escasísima recepción que esta obra encontrara, Frege decide demostrar su tesis logicista de manera informal, antes de hacerlo formalmente. Con este fin escribe *Gl.*, un auténtico tratado de filosofía de la matemática cuyo hilo conductor es el problema de la naturaleza de los números y de las aserciones aritméticas. Así, luego de exponer argumentos a favor de la analiticidad de las leyes de la aritmética –tesis característica de lo que se dio a conocer por logicismo– (cf. especialmente §3 de la "Introducción" y de la parte I. §§ 5 y 17), Frege se dedica a argumentar en contra de las escuelas matemáticas más relevantes de su época, nucleándolas en torno a dos tesis fundamentales: la tesis sostenida por el psicologismo de que los números son actos de la mente y la sostenida por el empirismo de que los números son propiedades de las cosas empíricas. Por el contrario, para Frege los números son objetos (no actuales sino abstractos), lo que resulta una manera de defender que la matemática tiene contenido propio, siendo en este punto su principal oponente el formalismo en boga de su tiempo. Esto es, las proposiciones matemáticas tienen contenido sustantivo y es por ello que son verdaderas o falsas. Así, su objetivo primordial es hacer explícito tanto el contenido de las adscripciones numéricas (en donde los números aparecen bajo una forma adjetival) como el de las proposiciones propias de la teoría de números (en donde los números aparecen mayormente como sustantivos).[2]

[2] Dummett (1991) plantea el desarrollo de dos estrategias distintas aunque complementarias. Cf. p. 99 para lo central de este planteo. Cf. también Schirn (1994), pp. 28-31.

No entraré en los argumentos específicos en contra de cada una de estas escuelas porque perdería el foco de atención. Por el contrario, me limitaré a señalar sucintamente lo que en esta polémica tenga que ver con el principio del contexto, que es el tema que nos ocupa.

Retomando, entonces, el asunto del hilo conductor de Gl., las posibilidades que Frege contempla respecto de la naturaleza de los números son que ellos sean o bien el resultado de procesos mentales (§§ 26 y 27), o bien propiedades de cosas (§§ 23 y 24) o de conjuntos de cosas (§28), o bien objetos (abstractos), tesis que Frege busca defender. Pero antes que argumentar de manera directa a favor de ella, utiliza la estrategia de un silogismo disyuntivo. Frege argumenta en contra de la viabilidad de las primeras tres posibilidades mencionadas. Ellas, en bloque, constituirían un cuerno del silogismo; el otro es la tesis de que los números son objetos. Del rechazo del primer cuerno se sigue que debe aceptarse el segundo. Por otra parte, de toda esta argumentación se sigue también que los números son objetos *abstractos*: si los números no son el resultado de procesos mentales, o sea, entidades internas al sujeto, entonces lo son externas; pero aún siendo externas no les cabe una determinación espacial (tampoco temporal si, siguiendo a Kant, la temporalidad es la condición de posibilidad de la experiencia interna). Como, por lo anterior, sabemos que son objetos, entonces son objetos abstractos u objetos lógicos (objetos independientes de toda determinación espacio-temporal).

Ahora bien, su posición lo pone ante el problema de determinar la especificidad de los números en tanto objetos abstractos y de hacer frente al contraargumento de que, una vez rechazadas las propuestas anteriores, no tenemos de ellos ninguna representación que nos permita dar con su naturaleza. Frege no logra una respuesta acerca de la naturaleza de estos particulares objetos abstractos que realmente lo satisfaga.[3] Es en este momento de la investigación que Frege recurre por primera vez a un uso explícito del principio del contexto, en una formulación muy similar a la dada en la "Introducción" en su afán de defender que los números son objetos independientes frente al contraargumento mencionado. En el §60 de *Gl.* leemos:

> La irrepresentabilidad del contenido de una palabra no es razón alguna para negarle todo significado o para excluirla del uso. El falso brillo del contraargumento surge de que consideramos a las pala-

[3] Cf. *Gl.*, §§ 55-61, apartados que Frege reúne bajo el título: "Cada número individual es un objeto independiente".

> bras aisladas y preguntamos por su significado, tomándolo por una representación. Así, parece que una palabra carece de contenido si falta una imagen interna que le corresponda. Pero *siempre se debe tener a la vista una proposición completa. Sólo en ella tienen las palabras propiamente un significado*. La imagen interna con la que eventualmente ideamos, no necesita corresponder a los elementos lógicos del juicio. Basta que la proposición, como un todo, tenga sentido; de éste obtienen también su contenido las partes (el énfasis es mío).

La tesis de que los números son objetos se ha defendido de manera indirecta, siguiendo la estrategia de un silogismo disyuntivo. Ello ha arrojado el hecho de que, por un lado, las representaciones eventualmente asociadas a los términos numéricos no constituyen su significado; por el otro, que así como no disponemos de representaciones adecuadas de todos los objetos existentes, tampoco las tenemos de los números. Peor aún, su misma calidad de objetos abstractos es renuente a que conformemos representación adecuada alguna. Si i) el significado de una unidad expresiva es lo nombrado por ella (tal la teoría semántica que *prima facie* subyace a *Gl.*), si ii) el significado de un término, consecuentemente, es lo nombrado por él, si iii) el significado de un término nos es dado por la representación que le está asociada y si iv) dar con el significado de una unidad expresiva es dar con su naturaleza, entonces de i), ii), iii) y iv) se sigue que la posición de Frege impide dar con la naturaleza de los objetos matemáticos. Pero, por un lado, Frege rechaza que la representación asociada a un término sea su significado o sea parte esencial para la captación del mismo, y esto muy particularmente para el caso de los objetos abstractos; por el otro, vía el principio del contexto, el significado de un término estará dado en el contexto de la oración en la que aparece, por lo que su irrepresentabilidad no es indicadora de nada.

A decir verdad, y es ésta la ambigüedad a la que me refería a comienzos de esta sección, no es que a Frege no le interese dar con el significado de los términos numéricos, sino que hasta ahora, conforme a su tesis de que son objetos abstractos, no ha podido. La apelación al principio del contexto no pretende solucionar el problema, como quiere Dummett, sino, según mi interpretación, dar un rodeo que permita obtener algún dato más acerca de los números. La apelación al principio del contexto es, por tanto, un recurso metodológico según el cual, llegado este momento de la investigación, la tarea no residirá en identificar el significado de los términos numéricos, en tanto modo en que se alude a los números independientemente del contexto de la proposición en la que aparecen, sino justamente fijar el sentido de este tipo de oraciones. Pero este recurso (como veremos, tan alabado por Dummett) nos deja en realidad perplejos.[4] Observemos que el modo en que se había enunciado el principio en la "Introducción" y el modo que he subrayado en el §60 no parecen indicar que *baste* con "que la proposición, como un todo, tenga un sentido [para que] de éste [obtengan] también su contenido las partes", como afirma de manera. Esta conjetura (de que basta con que la proposición tenga un sentido para que de éste obtengan su contenido las partes) anuncia, en todo caso, el problema que más adelante enfrentará Frege del pasaje de una definición contextual a una explícita, pero en ningún caso resuelve el problema originario de la naturaleza de los números, ya que el problema clave que deja pendiente es saber *cómo* del sentido de la proposición obtienen su contenido las partes.

Retomaré este asunto más adelante. De momento, me interesa resaltar que justamente por su misma formulación el principio del contexto podrá descartar propuestas en relación a la naturaleza de los números pero difícilmente ayude a dar con ella. En particular, descarta la propuesta de que los números son las representaciones asociadas a los términos numéricos (he aquí la función erística del principio del contexto) pero, por sí mismo, no permite tan siquiera que tenga lugar la pregunta ontológica acerca de la naturaleza de estos objetos.

Así, descartadas las tesis rivales, la tesis según la cual los números son objetos (independientes de la mente y abstractos) es la única viable y es la que se adopta, aunque por el momento no se haya podido dar con un concepto apropiado. Ahora bien, si el principio del contexto realmente fuera un principio sustantivo y no metódico el tratado terminaría prontamente. Tras haber sentado que los números no son ni el resultado de procesos mentales, ni propiedades de cosas o conjuntos de cosas sino objetos abstractos, y que no se trata de dar con una representación de las palabras con las que aludimos a ellos, sino que la tarea es dar con el significado de las proposiciones en que ellos aparecen, este objetivo estaría cumplido al ofrecerse una apropiada definición contextual. Sin embargo, esto no satisface a Frege y el tratado continúa a fin de dar con la naturaleza específica de estos objetos propios de la matemática, los números.

[4] Según Dummett (1991), p. 117, en cambio, lo que deja estupefacto al lector es el supuesto abandono de la definición contextual en aras de la definición explícita: "He therefore *abandons* the proposal in favor of an explicit definition of the (…) cardinality operator. This decision comes as a shock to the reader". El énfasis es mío. Sobre este pretendido abandono me ocupo en el apartado III.

Con el fin de facilitar la comprensión de mi argumento, en el apartado siguiente reúno las distintas versiones que Frege diera del principio del contexto en *Gl.* y ofrezco una evaluación de estas diferencias.

I. 2. Distintas versiones de un "principio fundamental"

Como hemos visto ni bien comenzado el apartado I, ya en la "Introducción" de *Die Grundlagen der Arithmetik* Frege se refiere al principio del contexto como uno de sus tres principios fundamentales:

> hay que separar tajantemente lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de lo objetivo;
> *no se debe preguntar por el significado de una palabra aislada, sino en el contexto de una proposición*;
> hay que mantener siempre a la vista la diferencia entre concepto y objeto (*Gl.*, p. 113; el énfasis es mío).

Así, luego de exponer argumentos a favor de la analiticidad de las leyes de la aritmética –tesis característica de lo que se dio a conocer por logicismo– (cf. especialmente §3 de la "Introducción" y §§ 5 y 17 de la parte I), Frege se dedica a argumentar en contra de las escuelas matemáticas rivales. Las posibilidades que Frege contempla respecto de la naturaleza de los números son que ellos sean:

i. el resultado de procesos mentales (§§ 26 y 27),
ii. propiedades de cosas (§§ 23 y 24),
iii. propiedades de conjuntos de cosas (§28),
iv. objetos abstractos.

Frege argumenta en contra de la viabilidad de las primeras tres posibilidades mencionadas, pero no logra una defensa realmente satisfactoria de la tesis de que los números son objetos.[5] Es en este momento de la investigación que Frege recurre por primera vez a un uso explícito del principio del contexto, ofreciendo una formulación algo diferente a la dada en la *Introducción.* Su afán es defender que los números son objetos independientes frente al contraargumento de que, una vez rechazadas las propuestas anteriores, no tenemos de ellos ninguna representación. En el §60 leemos:

[5] Cf. Frege (1884), §§ 55-61, apartados que Frege reúne bajo el título: "Cada número individual es un objeto independiente".

> Si (…) es imposible para nosotros, los hombres, el pensar sin el representar, sin embargo, su conexión con los pensamientos puede ser completamente externa, arbitraria y convencional.
>
> La irrepresentabilidad del contenido de una palabra no es razón alguna para negarle todo significado o para excluirla del uso. El falso brillo del contraargumento surge de que consideramos a las palabras aisladas y preguntamos por su significado, tomándolo por una representación. Así, parece que una palabra carece de contenido si falta una imagen interna que le corresponda. Pero *siempre se debe tener a la vista una proposición completa. Sólo en ella tienen las palabras propiamente un significado*. La imagen interna con la que eventualmente ideamos, no necesita corresponder a los elementos lógicos del juicio. *Basta que la proposición, como un todo, tenga sentido; de éste obtienen también su contenido las partes* (el énfasis es mío).

En este parágrafo me detendré oportunamente. En este momento, me interesa resaltar cierta tensión presente entre lo que considero que son dos formulación antagónicas del principio del contexto. Nombraré a la primera formulación ("siempre se debe tener a la vista una proposición completa. *Sólo* en ella tienen las palabras propiamente un significado.") "§60a" y a la segunda ("Basta que la proposición, como un todo, tenga sentido; de éste obtienen *también su contenido las partes*"), "§60b". Sostengo que es muy diferente decir que las palabras solamente tienen significado en una oración, a decir que del significado que tiene una proposición, las partes (que en última instancia serán palabras, pero rara vez lo son en primera instancia, ocupando este lugar, antes, estructuras subproposicionales más complejas) obtienen su contenido. En cuanto a las palabras, es razonable pensar que de los múltiples significados que ellas pueden tener, el contexto fija el significado de la aparición particular correspondiente.

La siguiente formulación del principio del contexto aparece en el consabido §62:

> ¿Cómo se nos ha de dar un número, si no podemos tener de él ninguna representación o intuición? *Sólo en el contexto de una proposición significan algo las palabras*. Por tanto, se tendrá que llegar a aclarar el sentido de una proposición en la que aparezca un término numérico (el énfasis es mío).

Por último, dejemos sentada la última cita del principio, a la que acudiré más adelante. En el §106, que integra la recapitulación final que Frege hace de toda la investigación, se lee:

> Formulamos luego la proposición fundamental de que *no se aísla el significado de una palabra, sino que se define en el contexto de una proposición*, con cuya observancia, según creo, se puede evitar la concepción fisicalista, sin caer en la psicologista (el énfasis es mío).

Basta una rápida inspección de estas distintas formulaciones, para concluir que ellas están lejos de ser claras y convergentes. Alcanzará para los fines de mi argumentación, y por el momento, señalar que de su conjunto surgen, por lo pronto y a propósito del significado de los términos numéricos, las siguientes dos interpretaciones básicas:

1. el significado de un término numérico puede establecerse una vez fijado el significado de la proposición en que éste aparece;
2. plantearse la cuestión del significado del término numérico y, a través de ello, dar con la naturaleza específica de los números es un despropósito.

Según mi opinión, las formulaciones dadas en la "Introducción", en §60, la formulación "§60a", y en la recapitulación responden a la primera interpretación. Si esto es correcto, el principio del contexto podría leerse como una "adaptación" al principio rector de *Bs.* de la primacía del juicio sobre los conceptos. La "adaptación" estaría sugerida por el hecho de que lo que ahora está en cuestión es la naturaleza de ciertos objetos y el correspondiente problema del significado de ciertos nombres propios. La segunda interpretación, que corresponde a la formulación "§60b" y la dada en el §62, es la defendida por Dummett, en consonancia con la enorme gravitación que Dummett adjudica a este pasaje en la historia de la filosofía, como veremos más adelante.

El problema principal de la primera interpretación reside en que es, en el mejor de los casos, programática: según ella, el principio del contexto establece ciertas condiciones que debe cumplir una definición de número pero es poco lo que permite discernir acerca de la naturaleza de los mismos, mientras que deja pendiente el problema clave de saber *cómo* del sentido de una proposición obtienen su contenido las partes. Pero, como contrapartida, esta interpretación permite explicar de manera coherente el desarrollo ulterior de la investigación, que nos conduce de una definición contextual de número a una explícita. Por el momento, sólo me interesa resaltar que, justamente por su misma formulación, el principio del contexto permite descartar propuestas diversas acerca de la naturaleza de los números, pero difícilmente ayude a dar con su naturaleza específica.

II. La definición contextual de número

Tras la imposibilidad de dar con un concepto apropiado de número de manera directa, Frege inaugura en el §62 una estrategia que hará uso de lo que posteriormente se dio en llamar 'el giro lingüístico en filosofía'. Recorreré con algún detalle este parágrafo y el siguiente ya que en ellos se enuncian –algunas claramente, otras de manera oscura y como al pasar– tesis centrales para nuestra discusión.

El título de la sección reza: "Para obtener el concepto de número se debe fijar el sentido de una igualdad numérica". Frege se pregunta:

> ¿Cómo se nos ha de dar un número, si no podemos tener de él ninguna representación o intuición? Sólo en el contexto de una proposición significan algo las palabras. Por tanto, se tendrá que llegar a aclarar el sentido de una proposición en la que aparezca un término numérico (*Gl.*, §62).

Valiéndose de una suerte de silogismo disyuntivo –tal como lo he señalado en la sección anterior– Frege comienza su propia investigación asumiendo por probada la tesis de que los números son objetos. Frente al problema inmediato de establecer qué tipo de objetos son, propone un rodeo por la cuestión epistemológica de cómo ellos nos son dados y apela al principio del contexto: la pregunta que lo ocupa, entonces, es cómo se fija el sentido de las oraciones que contienen términos numéricos. Dada la presente formulación claramente lingüística del principio del contexto, su aplicación convierte, sin ninguna justificación ulterior, lo que era un problema epistemológico en uno acerca del significado de ciertas oraciones. En resumidas cuentas, el problema ontológico original parece haberse reducido, en la interpretación de Dummett, a un problema de tipo semántico.[6]

II.1. La definición contextual de número y la noción de criterio de identidad

Ahora bien, a pesar de que Frege no ha logrado aún dar con el concepto de número, a lo largo de su investigación ha obtenido ciertos resul-

[6] Según Dummett (1991), p. 111, este proceder reviste una novedad tal que permite localizar en *Gl.* el verdadero nacimiento de la filosofía analítica. Más allá de la contundencia de este juicio, cabe aclarar que tal proceder ya había aparecido en el §46, que comienza así: "Sería bueno considerar al número en conexión con un *juicio* en el que apareciera su modo originario de aplicación" (el énfasis es mío). El análisis corres-

tados que retoma en este momento.[7] En el §46 mostró que una declaración que contiene términos numéricos es una declaración acerca de un concepto y en el §57 que éstas pueden asimilarse siempre a declaraciones que afirmen igualdades numéricas, o sea, a enunciados del tipo:

(1) el número de *F*s = el número de *G*s.

Como lo que nos interesa es el concepto de número, no habiendo de él ninguna representación o intuición, el recurso será aclarar el sentido de una proposición en la que aparezca un término numérico, que es una declaración acerca de un concepto, asimilable a su vez a una declaración que afirme una igualdad numérica. Tal como reza el título de la sección, debemos fijar entonces qué significa la afirmación de que un número es igual a otro de manera tal de llegar, por este medio, a un concepto adecuado de número. Así, en el mismo §62, Frege introduce la noción de criterio de identidad:

> Si se ha de designar un objeto con el símbolo a, entonces debemos poseer un criterio que nos permita distinguir en general si b es lo mismo que a, aunque no siempre esté en nuestro poder el aplicar este criterio.

De la conjunción de la doctrina del criterio de identidad con el principio del contexto (y lo que hemos derivado del mismo) resulta que expresiones de la forma 'el número de *F*s' quedarían explicadas si se logra un enunciado de identidad verdadero que las conecte. O sea, se deben especificar las condiciones de verdad de enunciados de la forma (1) ("el número de *F*s = el número de *G*s"), que es lo mismo que decir que debemos dar un criterio de identidad entre a y b para el caso particular en que estos objetos sean números. Para ello, Frege formula en el siguiente parágrafo lo que hoy se conoce como "el principio de Hume" o "el principio de Cantor/Hume".[8] Dicho principio habilita la siguiente definición contextual de número cardinal:

---

pondiente lo llevará a afirmar, acto seguido, que "el contenido de un enunciado de números es una afirmación sobre un concepto".

[7] A propósito de la idea de resaltar y prestar atención a los resultados positivos que se fueron acumulando a lo largo de la investigación cf. Angelelli (2004c), p. 10.

[8] La última denominación hace mayor justicia al hecho de que fue Cantor quien ofreció una teoría para la equivalencia entre conjuntos en general, *i. e.*, incluyendo los conjuntos infinitos.

(2) $\#F = \#G \leftrightarrow F \approx G$,

o sea, dos conceptos son equinuméricos si y sólo si el número que les corresponde es el mismo.

La condición de verdad para (1) se ha especificado de este modo: que el concepto F sea equinumérico con el concepto G, o lo que es lo mismo, que haya tantos Fs como Gs. El criterio de identidad entre el número de Fs y el número de Gs es, por tanto, el que haya tantos Fs como Gs. Pero veamos la cita en la que este principio se enmarca:

> Una vez que hemos obtenido un medio para aprehender un número determinado, y para reconocerlo como el mismo, podemos asignar a éste un término numérico como nombre propio.
> §63. Ya Hume mencionó tal medio.[82] "Cuando dos números están combinados de tal manera que el uno tiene siempre una unidad que responde a cada unidad del otro, los declaramos iguales". En nuestros días, la opinión de los matemáticos[83] parece concordar mucho en que la igualdad numérica puede ser definida de una coordinación biunívoca.
> [82] Bauman, *op. cit.*, t. II, p. 565. [*Treatise*, libro I, parte III, secc. I].
> [83] *Cfr.* E. Schröder, *op. cit.*, pp. 7 s; E. Kossak, *Die Elemente der Arithmetik. Programm des Friedrichs-Wender'schen Gymnasiums*, Berlin, 1872, p. 16; G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*; Leipzig, 1883.

La cita es más rica de lo que parece a primera vista, ya que en ella aparecen en germen los problemas que Frege tratará a continuación. En primer lugar, centrémonos por un momento en las palabras del filósofo escocés. Hume habla de números que se combinan y que tienen unidades que responden las de uno a las del otro.[9] Amén de lo que quiera decir Hume con "números que se combinan…", ello sugiere cierta noción de número que no es la que Frege busca defender. Aún así, es posible trazar cierto paralelo: la noción de *número* presente en la cita equivaldría a la noción que Frege reserva para los conceptos en general, entendiendo que las "unidades" a las que Hume hace referencia son (en Frege) los *objetos* que *caen bajo los conceptos*. La noción fregeana de *número* (por el momento, *número asociado a un concepto,* es decir, *número cardinal*) hace referencia a la cantidad de objetos que caen bajo cierto concepto en cuestión, noción que le servirá para construir posteriormente la de *extensión de un concepto*.

[9] La cita de Hume, que corresponde al *Tratado de la naturaleza humana*, libro I, Parte III, sección 1, p. 129, en sí misma es una referencia histórica que no tiene mayor peso.

De todos modos, es claro que, frente a la formulación humeana de igualdad numérica, resulta preferible quedarse con la noción de igualdad numérica análoga (aunque más precisa) definida en términos de coordinación biunívoca presente al final de la cita. Que la igualdad numérica sea definible en términos de coordinación biunívoca es una tesis que Frege compartiría con algunos matemáticos de la época, al juzgar por su nota al pie en donde menciona las obras de E. Schröder (*Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*), E. Kossak y G. Cantor. No es una "mera estipulación" [*outright stipulation*], como dirá Dummett. Más adelante vuelvo sobre esto. Por el momento destaco que la definición contextual dada, aunque adolezca de problemas, ofrece un análisis (al menos parcial) del concepto de número cuyos resultados habrán de usarse en la definición explícita, tesis que pretendo demostrar.

Finalmente, resulta clave observar que el medio tan ponderado (aludido al comienzo de la cita) "para aprehender un número determinado, y para reconocerlo como el mismo", es decir, la coordinación biunívoca, resulta sin duda útil justamente para, dado un número, reconocerlo como el mismo (es decir, reconocer en todo caso el mismo objeto frente a una forma de presentación distinta de la forma original), pero no para aprehender un número determinado sin más. No servirá, entonces, para, dado un objeto cualquiera, poder determinar si se trata de un número o no. Frege encarará este problema en la tercera de sus objeciones a la definición contextual de número ofrecida. Vayamos, entonces, a las objeciones que Frege presenta a dicha definición.

II.2. Las tres objeciones a la definición contextual de número

Lo que de inmediato pasa a considerarse es la naturaleza misma de una definición contextual, según Frege §63, "un tipo de definición nada habitual, la cual todavía no ha sido suficientemente atendida por los lógicos". He aquí la primera objeción que Frege alza contra la definición que ha propuesto, que concierne a la posibilidad de definir un objeto abstracto en términos de alguna relación de equivalencia definida sobre objetos de alguna otra clase, y del concepto general de identidad.[10] Frege recurre para ello a un ejemplo tomado de la geometría: la definición de igualdad de dirección de la recta a respecto de la recta b en términos del paralelismo entre ellas.

[10] Para una presentación sucinta de las tres objeciones que Frege presenta a la definición contextual de número, se puede cf. Thiel (1972), pp. 50-52, y Beaney (1996), pp. 100-101. Aspiro a que mi presentación extienda algunos aspectos que en las obras citadas, y en general, se pasan por alto.

Respecto de la definición buscada de número, a Frege le interesa evaluar si efectivamente el criterio de identidad ofrecido (o sea, la coordinación biunívoca) es la explicación de (1) "el número de *F*s = el número de *G*s", o si no es más bien (1) la explicación propia de una expresión como "hay tantos *F*s como *G*s". Pero resulta que toda la argumentación que Frege ofrece en defensa de lo primero es la analogía geométrica mencionada, recurso que Frege simplemente justifica en una nota al pie diciendo que tan sólo lo utiliza para poder expresarse más cómodamente y que "sería fácil trasladar lo esencial de estas discusiones al caso de la igualdad numérica" (*Gl.*, nota 84 del §65).[11]

La analogía es dudosa más allá del hecho de que la noción de dirección es, siguiendo los preceptos de la lógica de *Bs.*, un predicado de primer orden mientras que la de número lo es de segundo. Frege, siguiendo a Kant, acepta la idea de que la geometría está constituida por juicios sintéticos a priori. Estos juicios están basados en la intuición, que, aunque no sea empírica, en tanto que es intuición, no es conceptual, mientras que Frege pretende que la noción de coordinación biunívoca sea puramente conceptual. Resta la opción de considerar la analogía de la manera más debilitada posible. Y así, por cierto, considerar que la coordinación biunívoca puede estar acompañada de cierta intuición empírica para casos finitos. Sea como fuere, es sin duda una noción más intuitiva (en la acepción preteórica y más general del término) que la de *número asociado a un concepto* y por ello puede considerársela como su explicación. Lo fundamental es resaltar que, análogamente a cómo se define el concepto de dirección a partir del concepto intuitivo de paralelismo, es el concepto de "número de *F*s" el que se pretende definir a partir del que sería el concepto primario de "hay tantos *F*s como *G*s".

Volviendo al texto de Frege, en la analogía geométrica propuesta la pretensión es dar el significado de dirección a partir del de paralelismo, argumentando que no es dable a la intuición la dirección de una recta mientras que sí lo es el paralelismo entre dos de ellas (§64). Así, "la recta *a* es paralela a la recta *b*" es el significado de "la dirección de la recta *a* es igual a la dirección de la recta *b*". Frege se detiene aquí (§65) en una segunda objeción, en donde el uso del concepto general de identidad vuelve a ser cuestionado. En particular, su preocupación es que su definición

[11] Dummett (1991), pp. 115-117 ofrece una detallada crítica a esta analogía. De todos modos, coincido con la opinión de Beaney (1996), p. 101, quien afirma que no debe leerse en la elección del ejemplo más que una ilustración de la forma general de la definición, según la cual es posible definir un objeto abstracto en términos de alguna relación de equivalencia definida sobre objetos de algún otro tipo, y del concepto general de identidad.

no entre en conflicto con las leyes ya conocidas de la identidad. Así, la expresión "la dirección de la recta *a*", que es lo que queríamos definir, tan "sólo aparece secundariamente" (*Gl.*, §65) en la ya conocida relación de igualdad (determinándola, entonces, como igualdad entre direcciones). Para que esto sea una definición apropiada del concepto de dirección se debe mostrar que la definición respeta la noción leibniziana de igualdad con que estamos operando, que todo lo que exige es que un término pueda ser sustituido por otro con preservación de la verdad: "*Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate*" (§65). O sea, "la dirección de *a*" debe poder sustituirse por "la dirección de *b*" si la recta *a* es paralela a la recta *b*. El hecho de que esto es así prueba que el modo particular en que se ha determinado el concepto general de identidad coincide con la noción de identidad comúnmente aceptada.

Con todo, Frege encuentra una objeción a este tipo de definiciones contextuales que le resulta insalvable. En el §66 se lee:

> En la proposición
>
> "la dirección de *a* es igual a la dirección de *b*"
>
> la dirección de *a* aparece como objeto y en nuestra definición poseemos un medio para reconocer este objeto en caso de que pudiera aparecer de diferente modo, digamos, como dirección de *b*. Pero este medio no es suficiente para todos los casos. Por ejemplo, con él no se puede decidir si Inglaterra es lo mismo que la dirección del eje de la Tierra.[12]

El "medio" aludido que poseemos para reconocer que un mismo objeto aparece de dos modos diferentes es el criterio de identidad ofrecido, en este caso, para establecer la igualdad de las direcciones de dos rectas, a saber: el paralelismo entre ellas. Pero este criterio resulta insuficiente en el caso de cualquier objeto que no se presente como dirección de *b*. Éste es el problema conocido en la actualidad como "problema de Julio César", a partir del ejemplo que Frege da en el §56 para señalar el defecto de que adolece la definición inductiva de *número natural* en términos del *número de un concepto* ofrecida en el parágrafo anterior. Allí

[12] En Wright (1983) se elabora una revisión de este punto con el fin de establecer que este problema es espurio. Por esta vía se argumenta que la definición contextual basta para dar con una noción de número cardinal y es ella una de las estrategias contemporáneas más importantes para salvar el sistema fregeano, que da lugar a la escuela conocida como neologicismo. Cf. también Zalta (2000), en particular pp. 18-20 y 35-39.

Frege había intentado por primera vez definir la serie de los números naturales. Usando uno de los resultados positivos de su investigación, el hecho de que un enunciado numérico es una aserción acerca de un concepto, en el §55 había ofrecido las siguientes definiciones de 0, 1 y del "paso de un número al siguiente":

i) el número 0 corresponde al concepto $F \leftrightarrow \forall x\ (\sim Fx)$,
ii) el número 1 corresponde al concepto $F \leftrightarrow \sim \forall x\ (\sim Fx)\ \&\ \forall x\ \forall y\ ((Fx\ \&\ Fy) \rightarrow x = y)$,
iii) el número $n + 1$ corresponde al concepto $F \leftrightarrow \exists x$ (x es F y n es el número que corresponde al concepto "cae bajo F pero no es x").[13]

Pero de inmediato, en el §56 observa que en iii) la expresión en el *definiens* "n es el número que corresponde al concepto…" es tan desconocida como el *definiendum* y que, en i) y ii) no se ha dado un sentido a los signos "0" y "1" sino sólo a las expresiones "el número 0 corresponde a" y "el número 1 corresponde a". Por lo tanto, este modo no permite decidir si un objeto dado (el ejemplo, precisamente, es Julio César) es un número o no, así como tampoco se podrá demostrar a partir de que al concepto F le corresponden tanto el número a como el b que $a = b$.

El llamado "problema de Julio César" consiste, entonces, en que el Principio de Cantor/Hume, en tanto único principio que ofrece las condiciones de identidad para los números, no describe las condiciones bajo las cuales un objeto arbitrario, por ejemplo Julio César, puede ser identificado o no con un cierto número cualquiera. Aquí debe aclararse que por más que este problema sea compartido por todas las definiciones contextuales de aquellos operadores que son definidos a través de clases de equivalencias,[14] esto no significa que todas las definiciones contextuales sufran tal defecto. Básicamente, una definición es contextual cuando proporciona una sustitución para ciertas expresiones en las que ocurre el *definiendum*, pero no un equivalente para el mismo. Una definición recursiva, por ejemplo, proporciona una regla para el eliminar el *definiendum* en un

[13] Para facilitar la lectura he parafraseado las definiciones ofrecidas por Frege utilizando recursos notacionales contemporáneos. Para iii) me basé en la paráfrasis que ofrece Beaney (1996), p. 98.

[14] Recurso también mencionado como *abstracción lógica* o *principio de abstracción* por autores como Russell, Quine, Church, Dummett. Cf. Russell (1956), especialmente sección 110; Church (1956), p. 22; Quine (1940), §24, y (1961), pp.117-119. Para una breve exposición del tema cf, Zalta (2000), pp. 5-6. En relación al uso del término "abstracción" para tales efectos, cf. Angelelli (2004b), especialmente pp. 15-18.

número finito de pasos. De un conjunto de axiomas puede decirse que da una definición implícita de los términos que allí aparecen. Todo este tipo de definiciones se agrupan comúnmente bajo la categoría de definiciones contextuales.[15] De allí que no tenga sentido decir que las definiciones contextuales deben rechazarse sin más. Pero, en el caso que estamos analizando, no sólo importa a Frege la afirmación de que los números son objetos, sino que su teoría debe poder determinar cuáles son.[16]

No hay dudas por tanto de que la definición dada es en este aspecto insatisfactoria. Ahora bien, lo que es insatisfactorio puede ser descartado sin más o puede ser que, aunque insuficiente, aún resulte útil.[17] La primera posibilidad se ha convertido en la interpretación canónica de *Gl.* a partir de Dummett *1991*. En el apartado siguiente critico esta interpretación y analizo la alternativa sugerida, de manera sucinta, en Angelelli *2004c*, pp. 10-11. Buscaré mostrar que tal valoración positiva (en tanto que útil) de los resultados logrados hasta el momento está asimismo presente en el propio texto de Frege.

III. La definición explícita de número cardinal

Hemos visto ya las razones por las que la definición obtenida resulta insatisfactoria para Frege. La tarea que me ocupa ahora es marcadamente más controversial, en particular porque me opondré a Dummett en su interpretación acerca de lo que Frege propone de aquí en más. Para comenzar, fijaré el momento en que a mi entender se origina la controversia:

> §68: Si no podemos obtener un concepto estrictamente delimitado para la dirección, y por las mismas razones tampoco lo podemos obtener para el número, intentaremos otro camino.

[15] Cf. Haack (1978), p. 271. Una definición explícita, en cambio, define una expresión (el *definiendum)* por medio de otra (el *definiens*) que puede reemplazar a la primera dondequiera que ésta ocurra. Cf. Haack (1978), p. 271.

[16] Zalta (2000), pp. 35-36, cuya lectura coincide totalmente con la de Dummett, afirma (correctamente, a mi entender) que los inconvenientes del Principio de Hume aparecen cuando se reconoce que se trata de una definición contextual que tiene la misma forma lógica que la definición dada de *dirección*. Asimismo, Dummett (1991), p. 180, señala que la definición contextual del operador de cardinalidad sugerida en el §63 no es rechazada por que sea una definición contextual sino porque no logra solucionar “el problema de Julio César”.

[17] Debo a Ignacio Angelelli la conjetura de que tal es el caso en el análisis fregeano del concepto de número. Asimismo, en Beaney (1996), pp. 131-138, se presenta una excelente defensa de esta tesis. Mi trabajo complementa en este punto dicha defensa.

A partir de este punto, según Dummett, Frege abandona lo andado a favor de una definición explícita del operador de dirección y, por analogía, del operador de cardinalidad, tácitamente, el operador fundamental para la formación de términos numéricos.[18] Dummett sostiene:

> The passage [§62 to §69] as a whole is concerned to explore the possibility of introducing the cardinality operator by *outright stipulation* of the equivalence $\approx_{\mathrm{x}} (F_x , G_x) \leftrightarrow \mathrm{card}_{\mathrm{x}} [F_x] = \mathrm{card}_{\mathrm{x}} [G_x]$ (…); but at the last moment, Frege decides that there is one objection against which no defense can be provided. He therefore *abandons* the proposal in favor of an explicit definition of the (…) cardinality operator. This decision comes as a shock to the reader, because, in §62, the passage has opened with the terse enunciation of two principles which seem to make the proposal, rejected in §§66-9, mandatory. The first was the context principle (…). The second principle enunciated in §62 was that of criteria of identity (Dummett 1991, pp. 117-118; el énfasis es mío).

Antes de entrar en el nudo de la interpretación de Dummett caben un par de observaciones preliminares. Por lo pronto, el pasaje dedicado a explorar la posibilidad de introducir el operador de cardinalidad a través de la equivalencia entre “hay tantos *F*s como *G*s” y “el número de *F*s es igual al número de *G*s” va en todo caso del §62 al §67, dado que el §68 es el comienzo ya sea de una nueva estrategia (Dummett), o del segundo paso en pos de la definición buscada. Por otra parte, ya ha sido objetada en la sección anterior la afirmación de Dummett de que la equivalencia mencionada es una mera estipulación, ciñéndonos al texto de Frege, quien ha argumentado largamente a favor del uso de las nociones que intervienen en la definición contextual. Me refiero, en particular, a la tesis de que un enunciado numérico es una afirmación acerca de un concepto y a la evaluación acerca del criterio de identidad. Pero más allá de estos detalles (aunque el segundo no lo es tanto) Dummett, consecuentemente con su interpretación respecto del “abandono” de la definición contextual, se pregunta cuál ha sido entonces el sentido de establecer con tanto énfasis el principio del contexto:

> What, then, is the purport of the context principle, and what that of the doctrine of criteria of identity when something that

[18] Cf. Zalta (2000), pp. 16-18 y Dummett (1991), pp. 115-118.

appeared to be the consequence, and the intended consequence, of both is *repudiated*? (Dummett 1991, pp. 119; el subrayado es mío).

A favor de Dummett está el hecho obvio de que dicho principio fue introducido en la "Introducción" de *Grundlagen* como uno de los principios fundamentales de la investigación en ciernes y, amén de los usos que se hizo de él, es vuelto a citar en la recapitulación al final de la obra. En ello basa Dummett su argumentación.

III.1. Dificultades en la interpretación de Dummett

El problema interpretativo que preocupa a Dummett es claro: ¿cuál es el rol del principio del contexto, considerado una y otra vez como fundamental, si la definición buscada centralmente y que él favorece es descartada? Considero que Dummett no logra salir airoso de esta encrucijada. Es relativamente sencillo situar el rol negativo del principio del contexto en tanto que obstáculo para la concepción fisicalista o psicologista de número. Frege ofrece argumentos independientes en contra de que los números sean representaciones o intuiciones, que son las posibilidades que él vislumbra de atribuir un significado a los términos de manera aislada, es decir con independencia del contexto proposicional en el que aparecen. Pero como tampoco logra fundamentar una tesis positiva acerca de la naturaleza de los números argumenta, provisionalmente, del siguiente modo afín de poder continuar con la investigación: por el principio del contexto "no se debe preguntar por el significado de una palabra aislada, sino en el contexto de una proposición" (*Gl.*, p. 113).

Lo que es más dudoso es la afirmación que parece estar sosteniendo la posición de Dummett de que este principio nos libera de la necesidad de atribuir significado alguno a los términos numéricos, ya que en todo caso "basta que la proposición, como un todo, tenga sentido; de éste obtienen también su contenido las partes." (*Gl.*, §60). La pregunta crítica es *cómo* obtienen su contenido las partes a propósito del sentido de la proposición. Para dar respuesta a ello se requiere de una compleja teoría del significado[19] que excede a todas luces los alcances del principio del contexto, principio que tal como hemos visto admite distintas formulaciones a lo largo de *Gl.* que no son estrictamente equivalentes. Del modo en que se enuncia el principio en la "Introducción" y en el §62 se sigue que

[19] Para un estudio de la imbricación de este principio con el de composicionalidad, principio clave en la teoría del significado fregeana, cf. Schirn (1992), especialmente pp. 39-40.

sólo en el contexto de una proposición tienen significado las palabras, pero en el §60 se afirma que del sentido de la proposición se sigue el contenido de sus partes. Creo que, *pace* Frege, es ésta última en todo caso la formulación más adecuada, ya que el objetivo central de la investigación fregeana es dar con la naturaleza del concepto de número, y si el recurso es apelar a lo lingüístico, los números se expresan mediante términos numéricos, por lo que de ellos querremos poder determinar su significado. Es por ello que una vez vistas las limitaciones de la definición contextual la investigación continúa.

Sin lugar a dudas, el principio mismo no facilita la definición buscada. Pero es en este punto donde, según mi opinión, Dummett acepta acríticamente algo que en realidad es una limitación. El principio guía cierta parte de la investigación, pero no es cierto que guíe la obra en su totalidad. Y no importa cuántas veces esté mencionado a lo largo del texto ni qué tan enfáticamente. Lo que importa es ver cómo opera. Para convencernos de que, si bien se ha descartado la definición contextual, el principio del contexto no ha perdido peso Dummett señala, por ejemplo, que el principio es nuevamente mencionado en la recapitulación final que Frege hace de toda la investigación que comprende los §§106-109. En el §106 se lee:

> Formulamos luego la proposición fundamental de que no se aísla el significado de una palabra, sino que se define en el contexto de una proposición, con cuya observancia, según creo, se puede evitar la concepción fisicalista, sin caer en la psicologista.

Precisamente, el principio está aquí puramente ligado a su rol negativo. Debió haberse observado con el mismo celo que también la definición contextual aparece en esta recapitulación, en la que Frege vuelve a señalar su falencia y agrega que fue lo que “nos dio pie para la definición [explícita]” (*Gl.*, §107).

Pero Dummett parece haber sido hipnotizado por la apelación fregeana al principio del contexto, a juzgar por su elocuente comentario:

> §62 is arguably the most pregnant philosophical paragraph ever written. (…) it is the very first example of what has become known as the ‘linguistic turn’ in philosophy. Frege’s *Grundlagen* may justly be called the first work of analytical philosophy.
>
> After §61, Frege assumes that he has shown that numbers are objects, and must be treated as such. Since they are objects, he begins his new enquiry by posing the Kantian question, ‘How are numbers

> given to us?' (…) Frege has, however, already rejected the notion that number is any kind of perceptible feature of things, or that numbers are objects of which we can have intuitions. (…) His *solution* was to invoke the context principle: only in the context of a sentence does a word have a meaning (Dummett 1991, p. 111, el énfasis es mío).

Según Dummett, con la apelación al principio del contexto Frege ha logrado la solución a la investigación llevada a cabo en *Gl*. Dado el callejón sin salida al que lo condujese preguntarse acerca de la naturaleza de los números, en este momento de la investigación Frege corregiría dicha pregunta inicial por la pregunta kantiana acerca de cómo los números nos son dados. En mi opinión, esta interpretación desconoce la posición metafísica realista que es una constante en toda la obra fregeana. Si Frege considera que preguntarse cómo los números nos son dados será útil a su investigación, es porque el modo en que ellos nos son dados está en correspondencia directa con su naturaleza. Por lo tanto, la pregunta acerca de la naturaleza de los números no ha sido desplazada. Ahora bien, descartadas las tesis de que los números sean representaciones o intuiciones, ¿qué son? No lo sabemos todavía. Lo único seguro es que los nombramos mediante términos numéricos. Indagar sobre este hecho es lo que da origen a la filosofía analítica y que se conoce, en sus manifestaciones iniciales, como "el giro lingüístico" en la historia de la filosofía. No sabemos –y querríamos saber– qué significan estos términos numéricos, pero sabemos cómo se usan. En particular, podemos dar condiciones de identidad entre enunciados numéricos y, así, saber cuándo un número es igual a otro. Por el principio del contexto –según la interpretación del mismo que defiendo– del significado de un enunciado que afirma la igualdad entre dos números se seguiría el significado de sus partes componentes, o sea, en particular, el significado de los términos numéricos. Es decir, para determinar el significado de un término numérico debe determinarse el significado de la proposición en el que éste aparece.

Bajo esta lectura, está claro que el principio del contexto es un principio programático. En última instancia, su eficacia estriba en que permite que la investigación acerca de la naturaleza de los números continúe de manera tal de estar, cada vez, en mejores condiciones de dar una definición explícita. Así, creo que se le debe restar importancia en tanto que principio "fundamental" de la investigación y, más aun, en tanto principio que soluciona el problema de la misma. No debemos pasar por alto el hecho de que el objetivo de Frege es dar con un concepto de número, por lo que será insuficiente, *pace* el principio del contexto, tener el significado de una oración en la que haya términos numéricos si no se tiene así mismo un algoritmo que permita dar con la naturaleza de los números a partir de lo anterior. Sin duda –no olvidemos que era matemático– Frege maneja una cierta noción de número, aunque oscura.

La interpretación que propongo acerca del uso que se da al principio del contexto puede resumirse de la manera siguiente. Frege no encuentra ninguna definición precisa que lo satisfaga pero sí puede decir cuándo dos números son iguales; y explota entonces eso que tiene. De allí que carezca de sentido decir que luego descarta lo que ha obtenido en aras de otra definición, esta vez satisfactoria. Tiene más sentido pensar que estamos frente a una suerte de definición con dos cláusulas, tal como afirma Angelelli *2004c*, p. 11, a saber:

1) $\#F = \#G \leftrightarrow F \approx G$, y
2) $\#F$ = la extensión del concepto “ser equinumérico respecto de F”.

La primera, si desde el punto de vista del ‘contexto de descubrimiento’ ha brindado la intuición básica con la que construir la segunda, desde el punto de vista de la justificación, funciona como condición necesaria para la corrección de la misma. De este modo, si se pretende que lo denotado por la expresión “el numero de *F*s” sea igual al número de *G*s tal objeto deberá cumplir con las condiciones allí estipuladas.[20]

Dummett señala que el papel atribuido al principio del contexto en cuanto obstáculo para una concepción tanto fisicalista como psicologista de número, es atribuido en el “Prefacio” de *Grundgesetze der Arithmetik* [*Gg.*] a otro principio, que ya había aparecido mencionado en *Gl.*: la tesis de que hay un dominio de lo objetivo distinto del dominio de lo actual.[21] La pregunta inmediata es qué relación guardan, por tanto, el principio del contexto con el de la “objetividad inactual”. Dummett (1991), p. 201, sugiere que Frege habría visto que la comprensión del principio del contexto sería

[20] En el contexto de describir y explicar la génesis del equívoco de considerar la definición contextual fregeana de número como un principio de abstracción, Angelelli (2004c), p. 11, defiende la idea de que dicha definición contextual es una condición necesaria para la justificación de la definición explícita de número cardinal. En mi trabajo busco complementar esta tesis sobre el papel de la definición contextual respecto de la definición explícita defendiendo la idea de que la primera aporta intuiciones básicas para la formulación de la segunda. Desarrollo esto en el siguiente apartado.

[21] *Gg.*, pp. 15-16: “for me there is a domain of what is objective, which is distinct from that of what is actual, whereas the psychological logicians without ado take what is not actual to be subjective. And yet it is impossible to understand why something that has a status independent of the judging subject has to be actual, i. e., has to be capable of acting directly or indirectly on the senses”.

una condición esencial para reconocer que un objeto no necesita ser actual para poseer el estatus de objetividad. Si, por el contrario, para ser objetivo, un objeto debiera ser actual, entonces las posibilidades respecto de la naturaleza de los números se agotarían en ser o bien agregados físicos o propiedades físicas de los objetos, o bien productos de procesos mentales.

Ninguna de estas posibilidades permitiría, según Frege, fundar la matemática en tanto ciencia dada la contingencia (o no necesariedad) de tales entidades y, desde ya la concepción de ciencia que Frege defiende. Por su parte, las entidades objetivas pero no actuales son los llamados objetos abstractos,[22] cuya propiedad característica es que no tienen poder causal. Ahora bien, al no tener poder causal no sirven para explicar nada y, lo que es peor, no es posible hallar evidencia (sensible) de su existencia; por lo tanto, ¿cuál es el sentido de postularla?[23] El único modo de garantizar la existencia de objetos abstractos es que se trate de una verdad analítica, dado que una verdad analítica no necesita explicar nada para ser creíble sino que es aquélla que simplemente desafía su propia puesta en duda. De allí la importancia de establecer la naturaleza de los números con independencia de toda intuición sensible. El principio del contexto permite justificar nuestra creencia en la existencia de los números en tanto objetos en sí mismos, ya que nos "da permiso" para no preocuparnos por la circunstancia de no poder fijar un significado claro a los términos numéricos, confiando en que su significado se sigue de fijar primero el sentido de las oraciones en las que ellos aparecen (aunque no sepamos cómo). El hecho de que obtengan un significado de esta manera secundaria es, según Dummett, lo que les garantiza una referencia.[24]

Sin lugar a dudas el principio del contexto, en virtud de su formulación, es un principio concerniente al significado. Pero recordemos que para esta época Frege sólo contaba con una noción indiferenciada de significado. No había articulado aún su teoría del significado en términos de sentido y referencia,[25] por lo que no distinguía tampoco entre el significado de

[22] Sluga prefiere llamarlos objetos lógicos. Cf. Sluga (1980), cap. IV, en particular pp. 121-123.

[23] Respecto de este "desafío nominalista" cf. Dummett (1991), pp. 181-183.

[24] En cuanto a la extensión del principio del contexto a la doctrina de *Gg*. cf. la discusión que hace Dummett (1991) respecto de la propuesta de Wright (1983), en particular, pp. 183-187.

[25] A propósito de la compatibilidad del principio del contexto con la teoría del significado que Frege articula luego de *Gl.* cf. Dummett (1991), p. 193. En la misma línea, Kleemeier (1997) desarrolla las tesis de Dummett especialmente en los capítulos 1 y 2. Para un análisis acerca del problema de la compatibilidad del principio semántico de composicionalidad con el principio del contexto cf. Schirn (1992), especialmente pp. 36-40.

una expresión y aquello significado. De este modo, sostiene Dummett (1991), p. 192, el principio del contexto tal como aparece en *Gl.* afirma que las cuestiones acerca del significado de un término son internas al lenguaje mismo. Creo que esta conclusión es un poco forzada, o al menos, decirlo así resulta tendencioso.[26] Que el principio del contexto sea un principio semántico, no significa que el significado de un término numérico sea una cuestión interna al lenguaje mismo. Todo lo que el principio aserta es que para determinar su significado debe fijarse primero el significado de la proposición en que éste aparece. Dada la oscuridad o ambigüedad de las distintas formulaciones del principio, no queda claro si el significado del término numérico puede establecerse una vez fijado el significado de la proposición o si plantearse este objetivo es un despropósito (tal es la interpretación que parece favorecer Dummett).

Dummett afirma que el principio del contexto no permite una teoría semántica que dé cuenta del mecanismo por el cual una oración es verdadera o falsa en virtud de una instancia extra-lingüística. Esto resulta cierto si nos quedamos con las definiciones contextuales que el principio favorece, pero se contradice con las numerosas declaraciones fregeanas a favor de un realismo robusto. Dummett soluciona esta contrariedad sosteniendo que, a pesar del propio Frege, sólo es compatible con el principio del contexto tal como aparece formulado en *Gl.* una noción débil de referencia; pero no aclara qué debe entenderse por ello, insistiendo además en la aplicación forzada de una noción técnica como la de referencia (en tanto que dimensión propia del significado), a un asunto atravesado por una conceptualización diferente.

Intentemos entonces localizar la utilidad, si alguna, del principio del contexto, según Dummett. ¿Qué se requiere para reconocer una definición explícita como verdadera? De haber supuesto que la asignación de una referencia a un término consiste en una asociación mental del término con un

[26] Está claro que la discusión semántica en *Gl.* está en el mismo nivel que las oraciones sobre las que se ocupa, a diferencia de lo que ocurre en *Gg.*, en donde la distinción entre el lenguaje objeto (en este caso, el lenguaje formal) y el metalenguaje (estipulaciones en lenguaje ordinario acerca de las fórmulas y símbolos del lenguaje formal) es absolutamente clara. Otra cuestión es si esta distinción tiene en Frege fundamento en la naturaleza misma del asunto o si es una distinción tan sólo operativa. Me inclino más bien hacia lo segundo, que es lo que permite ubicar a Frege dentro de lo que van Heijenoort (1967) denomina la tradición universalista. Es decir, el lenguaje formal propuesto es tanto como una forma resumida y conspicua del lenguaje natural. Por lo que, estrictamente, cuando mediante el lenguaje natural Frege despliega cosas respecto del sistema propuesto, no se está usando un lenguaje ajeno al primero para hablar de él, ya que en esencia nunca se ha partido del lenguaje natural.

referente, aprehendido independientemente del lenguaje, nunca habría sido aceptada la definición de Frege de los números cardinales como extensiones de conceptos, ya que no aprehendemos extensiones de conceptos, y mucho menos extensiones de conceptos de segundo orden. Para Dummett, el principio del contexto nos libera de tener que asociar un referente a los términos numéricos: una vez aceptado el principio del contexto, sabemos que lo que se necesita es una definición que fije las condiciones de verdad de aquellas oraciones en que los términos numéricos ocurren. Para mí, en cambio, el principio del contexto nos libera de tener que atribuirles un referente *actual* o subjetivo, pero no un referente sin más. *Ergo,* contrariamente a lo que defiende Dummett y no obstante su formulación semántica, creo que el uso del principio del contexto tiene, al menos en *Gl*., un valor básicamente erístico, mientras que su rol positivo se limita a sugerir la primera parte del recorrido que nos conducirá a la definición buscada de número.

III.2. La vigencia de la definición contextual

Una vez presentada críticamente la posición de Dummett el objetivo siguiente es demostrar, en contra suyo, que la llamada definición contextual persiste en la definición explícita de número cardinal. Intentaré mostrar que esta persistencia actúa de manera doble, *i.e.*, como trasfondo intuitivo de la definición nominal propuesta y como condición necesaria de la misma. Para ello muestro primeramente cómo la ocurrencia de tal definición está absolutamente condicionada por la definición antes ofrecida, contrariamente a lo que se sostiene en Angelelli (2004c), en donde se sugiere que Frege es tomado por el convencionalismo al momento de ofrecer una definición explícita de número cardinal. En segundo término argumentaré, y aquí en coincidencia con Angelelli, a favor del rol que Frege estaría adjudicando a su definición implícita de número cardinal en tanto que condición necesaria para la validez de la definición explícita.

1. Vayamos entonces a lo prometido en primer lugar. En Angelelli (2004c), p.11, leemos:

> Frege's unsatisfaction with respect to the knowledge of number he has reached in *Gl.* (1884) §62 can be expressed as follows. The denotation of the singular terms of the form (…) "N'F", "N'G"… is not yet sufficiently well established for Frege. At this moment, the siren of conventionalism tells Frege that he should feel free to choose any denotation he likes –provided only that the choice is "compatible" with the biconditional N'F = N'G $\leftrightarrow$ F ~ G . (…) Frege, already in the

> hands of conventionalism, is delighted (because of his logicism) to find out that "N'F" can be assigned as denotation the extension of the concept of being "equinumerous" with F, that is the class of all concepts X such that there is a bijection between the objects falling under X and those falling under F (1884 §68).

Según se sigue de la cita, Frege habría elegido libremente cualquier denotación para los términos singulares de la forma "el número de *F*" siempre que tal elección sea compatible con el bicondicional N'F = N'G ↔ F ~ G. En mi opinión, el asunto de la "elección" de tal objeto merece ser abordado con algún cuidado. Defiendo la tesis según la cual ella no es convencional y me baso en el modo en que Frege reconoce la inviabilidad de la definición ofrecida anteriormente y en el detalle de cómo llega a la definición explícita. Retomemos para ello la lectura del §68:

> Si no podemos obtener un concepto estrictamente delimitado para la dirección, y por las mismas razones tampoco lo podemos obtener para el número, intentaremos otro camino. Si la recta *a* es paralela a la recta *b*, entonces la extensión del concepto "recta paralela a la recta *a*" es igual a la extensión del concepto "recta paralela a la recta *b*" [y] a la inversa. (…) Por tanto, intentemos definir:
>
> la dirección de la recta *a* es la extensión del concepto "paralela a la recta *a*"; la forma del triángulo *t* es la extensión del concepto "semejante al triángulo *t*".

En primer lugar, este "nuevo camino" se inicia con la consideración de un doble condicional, a saber, si la recta *a* es paralela a la recta *b*, entonces la extensión del concepto "recta paralela a la recta *a*" es igual a la extensión del concepto "recta paralela a la recta *b*" y a la inversa. Esto nos retrotrae a la analogía geométrica utilizada anteriormente, que vale la pena tener presente:

(2') $a \,//\, b \leftrightarrow$ dirección de a = dirección de b.

Recordemos que mediante este bicondicional se buscaba definir el concepto de dirección en términos de paralelismo, considerado este último intuitivamente primario. Además, la equivalencia lógica establecida era entre la igualdad de dos objetos por un lado y una relación de equivalencia, como lo es el paralelismo, por el otro. Pero ahora, subrepticiamente, Frege propone un recurso para transformar dicha relación de equivalencia a su vez en una igualdad entre objetos. La estipulación que se acaba de proponer ("si la recta a es paralela a la recta b, entonces la extensión del concepto "recta paralela a la recta a" es igual a la extensión del concepto "recta paralela a la recta b" y a la inversa") es un paso clave para lograr una definición explícita; en símbolos:

(3') $a \,/\!/\, b \leftrightarrow$ la extensión del concepto "recta // a la recta a" = la extensión del concepto "recta // a la recta b".

El análogo para el análisis de la noción de número será:

(3) $\#F = \#G \leftrightarrow$ la extensión del concepto "equinumérico al concepto F" = la extensión del concepto "equinumérico al concepto G".

Recordemos asimismo la definición contextual de número (que está implícita en el §62 de *Gl.* y aquí presenté en símbolos en el apartado II.1):

(2) $\#F = \#G \leftrightarrow F \approx G$.

Como bien puede observarse, el recurso que Frege presenta por primera vez en el §68 consiste en anteponer a la expresión 'concepto "recta // a la recta a" ' la expresión 'la extensión del'. Cabe aclarar que pese a que Frege pretende minimizar la novedad, introducir la expresión "la extensión de" es un recurso clave a la vez que crítico. Que Frege es totalmente consciente de lo primero se puede comprobar en la nota al pie de página en referencia a la definición de número cardinal.[27] Creo que puede leerse allí cierta reserva hacia la noción de extensión de un concepto, reserva que por el momento Frege no estaría dispuesto a tematizar, de ahí que la dé por presupuesta. De hecho, años más tarde en *Gg*. Frege ya no sostiene esta posición y busca precisar la noción a través de su ley fundamental V, lo cual produjo, como es sabido, drásticas consecuencias en su sistema. Frege querría poder decir simplemente "concepto" en lugar de "extensión del concepto" pero tendría que hacer frente a ciertas objeciones (lo que lo "llevaría muy lejos", *Gl.*, nota 88 del §68), la más evidente: que los objetos podrían ser de iguales extensiones sin tener que coincidir. Mientras tanto el recurso le es sumamente útil para transformar una relación de equivalencia en un enunciado de identidad entre objetos. Pero volviendo al derrotero que nos

[27] "Creo que simplemente podría decirse "concepto", en lugar de "extensión del concepto". Pero (...) esto está en contradicción con mi primera afirmación de que el número individual es un objeto. (...) Presupongo que se sabe lo que es la extensión de un concepto" (*Gl.*, n. 88 del §68).

conducirá hacia la definición nominal de número, vemos que por una simple sustitución de idénticos entre (2') y (3') se logra un bicondicional cuyos lados son ahora –ambos– igualdades entre objetos:

> (4') dirección de a = dirección de $b \leftrightarrow$ la extensión del concepto "recta // a la recta a" = la extensión del concepto "recta // a la recta b".

Finalmente, Frege construye la nueva definición de dirección tomando uno de los lados (el izquierdo) de cada igualdad del enunciado (4'), de donde surge la definición: 'la dirección de la recta a es la extensión del concepto "paralela a la recta a" ' del §68, definición claramente explícita en la que a un término singular se le hace corresponder otro que lo puede sustituir perfectamente. Reiteramos, el problema técnico aparecerá recién en *Gg.* cuando se quiera formalizar la noción de extensión. Aplicando el razonamiento análogo, o sea reemplazando rectas (o dirección de una recta) por conceptos (o por el número de un concepto) y la relación de paralelismo por la relación de equinumerosidad entre conceptos tenemos:

> (4) $\#F = \#G \leftrightarrow$ la extensión del concepto "equinumérico respecto al concepto F" = la extensión del concepto "equinumérico respecto al concepto G".

De este modo se llega a la definición buscada de número cardinal:

> Si queremos aplicar esto a nuestro caso, tenemos que poner conceptos en lugar de rectas o de triángulos, y en lugar del paralelismo o de la semejanza, la posibilidad de coordinar biunívocamente los objetos que caen bajo un concepto con los que caen bajo el otro. En gracia a la brevedad, llamaré al concepto F *equinumérico* respecto al concepto G si presenta esta posibilidad (...). Por tanto defino:
>
> el número que corresponde al concepto F es la extensión del concepto "equinumérico respecto al concepto F" (*Gl.*, §68).

Obsérvese por cierto que, análogamente a lo que ocurría con el caso de la relación entre la dirección de una recta y el concepto de paralelismo, en el caso que ahora nos ocupa se habla de "la extensión del concepto *equinumérico respecto al concepto F*", expresión nominal que pretende reemplazar aquélla relacional de equinumerosidad entre dos conceptos.

2. Hasta aquí he pretendido mostrar cómo el primer intento de definición sirve de guía y está en el corazón de la definición que finalmente se

adopta. Pero de hecho ha habido, amén del recurso –que se acepta no sin reservas– utilizado para transformar lo que era una relación de equivalencia en una igualdad entre objetos, un salto del último bicondicional mencionado a dicha definición explícita. Se hace patente pues la urgencia de argumentar a favor de este salto (no necesario, aunque no por ello meramente arbitrario. El enunciado "el número que corresponde al concepto *F* es la extensión del concepto "equinumérico respecto al concepto *F*" " no se sigue de los enunciados anteriores; pero su fuerte familiaridad con el enunciado (4) $\#F = \#G \leftrightarrow$ la extensión del concepto "equinumérico respecto al concepto *F*" = la extensión del concepto "equinumérico respecto al concepto *G*" sugiere que el primero se construyó conectando de modo definicional uno de los términos de la primera igualdad de (4) con el término correspondiente de la otra igualdad.). Así, en lo que sigue se mostrará cómo este paso ha de cumplir con una importante condición: ser consistente con nuestra definición contextual, definición que funciona, por lo tanto, como condición necesaria de una correcta elucidación de la noción de número cardinal.

El problema aparece explícito en el parágrafo inmediatamente posterior al de la definición ofrecida de número:

> §69: Por lo pronto, tal vez es poco evidente que esta definición acierte. ¿No se piensa por extensión de un concepto algo distinto?[28] Lo que por ello se piense surgirá de los asertos básicos que puedan hacerse de las extensiones de los conceptos. Éstos son los siguientes:
>
> 1. La igualdad,
> 2. que una comprende más que la otra.
>
> Así, la proposición:
>
> > la extensión del concepto "equinumérico respecto al concepto *F*"
> > es igual a
> > la extensión del concepto "equinumérico respecto al concepto *G*"
>
> es verdadera, si y sólo si la proposición
>
> > al concepto *F* corresponde el mismo número que al concepto *G*
>
> también es verdadera.

[28] La pregunta ("¿No se piensa por extensión de un concepto algo distinto [de un número]?") muestra que Frege es permeable al hecho de que la noción de extensión de un concepto tiene una larga tradición en la historia de la lógica y que nunca se la había asimilado a la noción de número.

Al juzgar por el comienzo mismo de la cita, Frege es consciente de que necesita argumentar a favor de la definición dada en términos de extensión de un concepto. A propósito de esta noción "lo que por ello se piense surgirá de los asertos básicos que puedan hacerse de las extensiones de los conceptos (...): 1. La igualdad, 2. que una comprende más que la otra". Así, lo único que cuenta es la noción mínima que dicha noción conlleva; valga la redundancia, se trata de una noción meramente extensional (cuantitativa) de la noción de "extensión de un concepto". Dicho esto, lo que sigue es observar que si una extensión (llamémosla ext$F$ en resumen de la expresión "extensión del concepto 'equinumérico al concepto F' ") es igual a otra (sea ext$G$) entonces (y sólo si) al concepto F y al concepto G deben corresponder el mismo número, esto por una simple sustitución de idénticos. Pero esto coincide con el enunciado (4), surgido a su vez de (2) y (3); de lo que se sigue que lo que se ha determinado como la denotación de "el número de F" debe cumplir con la condición (2), que era la definición contextual, QED.

Así, he probado que el bicondicional (2) –anteriormente propuesto como definición de número cardinal– es la piedra de toque de la nueva definición, o dicho de manera más exacta, que el objeto que corresponde a la denotación de "el número de F" debe cumplir con la condición (2). O sea, cierto número, en particular el número de Fs (ya que de eso se trata la extensión del concepto "equinumérico respecto al concepto F") será igual a cierto otro número (el número de Gs) si y sólo si F es equinumérico respecto a G. Precisamente como "complemento y prueba de nuestra definición" (tal el título que nuclea los parágrafos que van del 70 al 83), tras algunas observaciones preliminares Frege se dispone a "mostrar ahora que el número que corresponde al concepto F es igual al número que corresponde al concepto G, en el caso de que el concepto F sea equinumérico respecto al concepto G" (*Gl.*, §73), según las definiciones dadas. Recién una vez demostrado esto, y porque "las definiciones se prueban por su fecundidad" (*Gl.*, §70), intentará ver si las conocidas propiedades de los números se derivan de la definición dada de número que corresponde al concepto F (§§ 74 a 86).

IV. Conclusión

He procurado mostrar que el modo enfático en que Frege presenta el principio del contexto puede conducir de manera casi natural a una errónea interpretación de la argumentación general de *Grundlagen*, y que la confusión se agrava si se cree que la definición contextual dada de número cardinal se descarta en pos de la definición explícita. Las funciones del principio en la argumentación son básicamente dos. Por un lado, tiene una función erística en cuanto a que su observancia permite descartar las tesis rivales a la del autor. Y en cuanto a su función positiva en la argumentación, si bien no se trata de que queda reducido a la nada junto con la definición que favorece, tampoco resuelve por sí solo el problema de la naturaleza de los números. Su formulación semántica es en este aspecto engañosa: acerca del problema que nos acucia, el de la naturaleza de los números, no nos dice nada en lo inmediato.

En suma, creo que es más consistente con *Gl.* en su conjunto considerar al principio del contexto como un principio metodológico al que Frege apela cuando se enfrenta con el problema de dar con una definición precisa de una noción que, en tanto matemático, sin duda posee aunque de manera tácita, sin pasar por alto que esta apelación no le resuelve el problema aunque sí lo ubica en cierta dirección. De allí que la investigación continúe. Así, a diferencia de lo afirmado en Dummett (1991), la definición contextual de número cardinal (que en virtud del principio del contexto se propone como una primera aproximación de la definición de número buscada) no es abandonada por Frege al dar su definición explícita de número. En cuanto a la función negativa mencionada arriba, el principio del contexto sirve para eliminar posiciones rivales a las del autor sobre la naturaleza de los números. En cuanto a su función positiva, el principio del contexto es la justificación filosófico-metodológica de la definición contextual de número. Dicha definición tiene un papel heurístico en el contexto de descubrimiento de la definición explícita, en el sentido de que ofrece una intuición clave que permite llegar a ella y, a su vez, es una condición necesaria de la definición explícita en el contexto de justificación, siendo que esta última se ha construido a partir de la primera.

Por todo ello, sostengo que la función del principio del contexto no es la que prioriza Dummett, *i. e.*, la fallida función de resolver el problema ontológico de la naturaleza de los números, sino que es fundamentalmente metodológica. En efecto, es en su función erística y heurística en donde debe ubicarse su relevancia para la investigación llevada a cabo en *Gl.*

Bibliografía

Angelelli, I. (2004a), "Predication Theory: Classical vs. Modern" en H. Hochberg y K. Mulligan (comps.), *Relations and Predicates*, Ontos Verlag, pp. 55-80.

—— (2004b), "Adventures of Abstraction" en Coniglione, F., Poli, R., Rollinger R. (eds.), *Idealization XI. Historical Studies on Abstraction and Idealization* (Amsterdam/New York, Rodopi, *Poznań Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities,* Vol. 82), pp. 11-35.

—— (2004c), "The Troubled History of Abstraction", en prensa.

Angelelli, I. (1967), *Studies on Gottlob Frege and Traditional Philosophy,* Dordrecht, Reidel.
Beaney, M. (1997), *The Frege Reader*, Oxford, Blackwell.
—— 1996, *Frege. Making Sense*, Londres, Duckworth.
Beaney, M., y Reck, Erich (eds.) (2005), *Gottlob Frege. Critical Assessments of Leading Philosophers*, Londres-Nueva York, Routledge.
Church, A. (1956), *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton, Princeton University Press.
Dummett, M. (1991), *Frege. Philosophy of Mathematics,* Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press.
—— (1973), *Frege. Philosophy of Language,* Londres, Duckworth.
Frege, G. (1893), [*Gg.*] *The Basic Laws of Arithmetic,* trad. M. Furth, Berkeley & Los Angeles, University of California Press, 1964.
—— (1884), [*Gl.*] *Los fundamentos de la aritmética*, trad. H. Padilla, México, UNAM, 1972.
—— (1879), [*Bs.*] *Conceptografía,* trad. H. Padilla, México, UNAM, 1972.
Fulugonio, M. G. (2007), "Avatares en la definición de número fregeana", en Lorenzano, P. y Miguel, H. (eds.), 2007, *Filosofía e Historia de la Ciencia en el Cono Sur,* Volumen II, Buenos Aires, Prometeo Libros-AFHIC, pp. 153-165.
Haack, S. (1991), *Filosofía de las lógicas*, Madrid, Cátedra.
Hume, D. (1739-1740) *Tratado de la naturaleza humana*, Madrid, Tecnos, 1992.
Kleemeier, U. (1997), *Kontext-Prinzip und Ontologie*, Munich, Verlag Karl Alber.
Quine, W. V. O. (1961), "Logic and the Reification of Universals" en *From a Logical Point of View*, Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press.
—— (1940), *Mathematical Logic*, Harper & Row.
Russell, B. (1956), *The Principles of Mathematics*, Londres, Allen & Unwin.
Schirn, M. (1994), "Los números como objetos y el análisis de los enunciados numéricos", *Análisis Filosófico*, XIV, (1), pp. 22-40.
—— (1992), "El método de descomposición de pensamientos en Frege", *Análisis Filosófico*, Vol. XII, (1), pp. 31-41.
Sluga, H. (1980), *Gottlob Frege*, Londres.
van Heijenoort, J. (1967), "Logic as Calculus and Logic as Language", en *Synthese*, 17, pp. 324-330.
Wright, C. (1983), *Frege's Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen.
Zalta, E. N. (2000), "Frege's Logic, Theorem, and Foundations of Arithmetik", en *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.